

6. DETERMINACIÓN DE LOS EJES DE UNA ELIPSE A PARTIR DE DOS DIÁMETROS CONJUGADOS. MÉTODO DE MANNHEIM

Recordando la construcción de la elipse por afinidad tenemos (fig. 15):

1. Si los radios $\overline{OQ}$ y $\overline{OP}$ de la circunferencia son perpendiculares, las líneas $\overline{OQ_1}$ y $\overline{OP_1}$ son diámetros conjugados.
2. Si se gira el triángulo QQ_1Q' respecto del centro O , hasta que $\overline{QQ'}$ coincida con $\overline{PP'}$, se tiene el rectángulo $Q_2P'P_1P$.
3. Como el giro ha sido de 90° , el segmento $\overline{OQ_1}$ es perpendicular al $\overline{OQ_2}$. A la vista de la figura, también se observa que los segmentos $\overline{Q_2P'}$ y $\overline{P'P_1}$ son perpendiculares y paralelos a las direcciones de los ejes de la elipse.

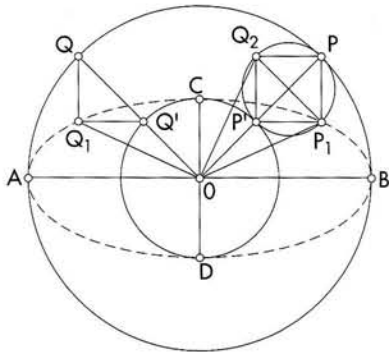


Fig. 15.

De todo esto tenemos el procedimiento de Mannheim (fig. 16):

Datos: diámetros conjugados $\overline{MN}$ y $\overline{HI}$.

1. Se traza por O una línea perpendicular a uno de los diámetros, por ejemplo al $\overline{MN}$.
2. Se lleva sobre la perpendicular el segmento $\overline{OE}$, que es igual al segmento $\overline{ON}$.
3. Se traza la circunferencia de diámetro $\overline{ET}$.
4. Se une O con el centro O' , cortando en F y G a la circunferencia.
5. Las líneas $\overline{EF}$ y $\overline{FT}$ dan la dirección de los ejes, por tanto se trazan por O líneas paralelas a éstas. Es claro que las líneas son perpendiculares, por estar el ángulo $\widehat{EFT}$ inscrito en una semicircunferencia.
6. Por último, se llevan sobre las líneas anteriores los segmentos $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OF}$ y $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OG}$. Determinando así los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la elipse, cuyo dibujo se presenta con líneas de trazos.

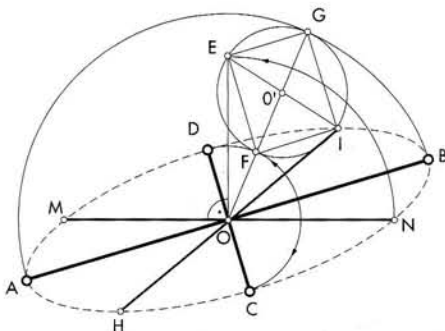
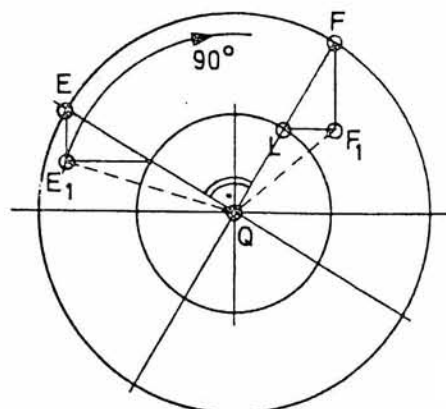


Fig. 16. Determinación de los ejes de una elipse a partir de los diámetros conjugados.

Amadeo Mannheim (1831-1906), geómetra francés, profesor de geometría descriptiva en la Escuela Politécnica de París.



Dados un par de diámetros conjugados, hallar los ejes



13.25. Aplicando el procedimiento gráfico ya visto, a partir de dos diámetros *perpendiculares* QE y QF de la circunferencia, conseguiremos los semidiámetros QE₁ y QF₁ respectivos de la elipse, que serán conjugados uno de otro (por su procedencia).

Datos: 13.27. Sean el par de diámetros conjugados de la figura.

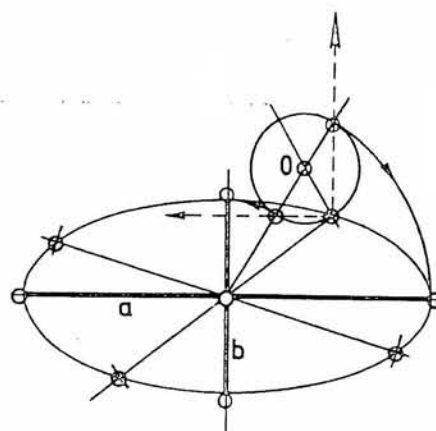
Operaciones gráficas: 13.28. Gírese 90° uno de los semidiámetros.

13.29. El extremo girado y el no girado determinan el segmento E_1F_1 cuyo punto medio es el centro de la circunferencia O .

Trácese la recta QO, que cortará la circunferencia O en L y F₁, siendo QL = **b** (semieje menor) y QF = **a** (semieje mayor de la elipse), en valor absoluto. La posición de los ejes se obtendrá con las direcciones F₁L y F₁F.

Solución: 13.30. Los ejes quedan situados, respecto de los diámetros conjugados, tal como en la figura.

Justificación: Compárense las figuras 13.26 y 13.30. Las construcciones que relacionan ejes-diámetros conjugados, son las mismas que hacen corresponder, recíprocamente, diámetros conjugados-ejes.



13.30

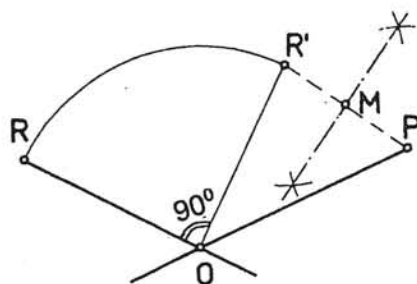
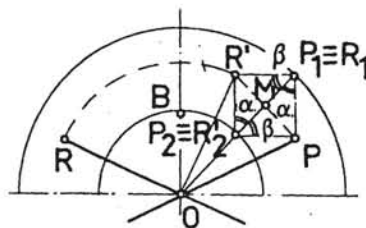
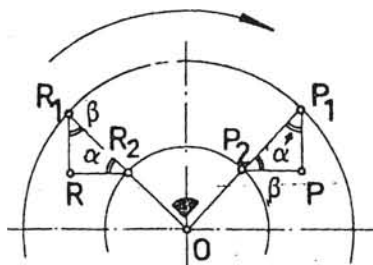
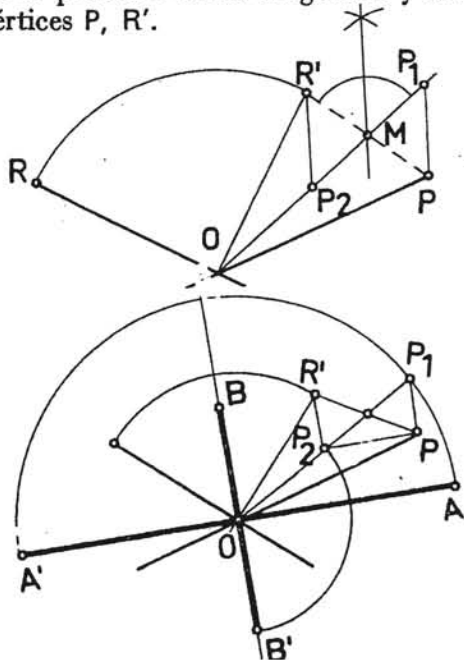
26.5. Determinacion de los ejes de la elipse dada por sus diámetros conjugados.

Los ángulos α de vértices en P_1 y R_2 son iguales, por tener lados respectivamente perpendiculares entre sí, por la misma razón también lo son los β .

Si mediante un giro de 90° se hace coincidir R_1 con P_1 los vértices del triángulo $R_1 R_2 R$ pasarán a ocupar la posición R'_1, R'_2, R' y se formará un rectángulo, $P_1 P, P_2 R'$ de lados respectivamente paralelos a los ejes. Obsérvese que en el giro para pasar a la posición R' el punto R describió un arco de 90° .

Dados los diámetros conjugados:

1. Determinése la posición R' .
2. $R'P$ será diagonal del rectángulo y su punto medio, M , corresponderá al centro del mismo.
3. La otra diagonal del rectángulo se hallará uniendo M con O , y conocida la posición de las diagonales y los vértices P, R' .



4. Se encuentran los P_1, P_2 , trazando paralelas a la bisectriz del ángulo que forman las diagonales por R' y P .
5. Dado que los lados del rectángulo son respectivamente paralelos a los ejes, se trazarán éstos por el centro, O , como paralelas a dichos lados.
6. Las longitudes de los semiejes $OB' = OP_2$ y $OA = OP_1$, se trasladan finalmente, con centro en O y radios respectivos con lo que se solventa el problema.

Para construir la elipse dados sus diámetros conjugados, podrían, pues, determinarse sus ejes y proceder según las construcciones clásicas indicadas.