10 TANGENCIAS

Tanto en la naturaleza como en nuestro mundo tecnificado, vemos como los cuerpos presentan líneas curvas y rectas enlazadas de forma armoniosa. En este tema se van a ver los enlaces de rectas con circunferencias y de circunferencias entre sí.

Una recta y una circunferencia o dos circunferencias son tangentes entre sí cuando sólo tienen un punto en común, denominado de tangencia y simbolizado por la letra *T*.

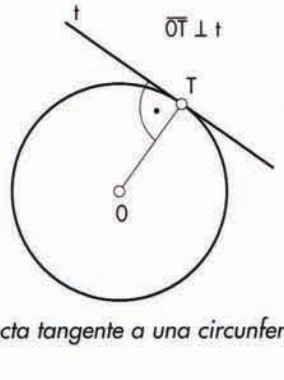


Fig. 1. Recta tangente a una circunferencia.

1 PROPIEDAD 1

La recta tangente, *t*, a una circunferencia en un punto, *T*, de ella es perpendicular al radio $\overline{OT}$. De no ser así la recta sería secante a la circunferencia.

2 CLASIFICACIÓN

En los problemas de tangencias pueden intervenir los siguientes elementos: circunferencia (*C*), recta tangente (*t*), punto de tangencia en la circunferencia (T_c), punto de tangencia en la recta (T_t), punto cualquiera (*P*) y radio de la circunferencia (*r*).

Dichos problemas se pueden englobar en dos grandes grupos:

1. **Cuando las soluciones son rectas.** Los casos que se pueden presentar, teniendo en cuenta que una recta queda definida por dos de los elementos anteriores, son: *P C*, T_c *C* y *C C*.

2. **Cuando las soluciones son circunferencias.** Este grupo a su vez lo podemos dividir en tres tipos:

   – Circunferencias tangentes a rectas.

   – Circunferencias tangentes a otras circunferencias.

   – Circunferencias tangentes a rectas y circunferencias.

En todos ellos se necesitan tres elementos para definir a una circunferencia, presentándose los siguientes casos (aplicando combinatoria con repetición):

$$CR_6^3 = CR_8^3 = 56 \text{ casos}$$

pero no todos sirven, pues muchos son eliminados por no ser casos de tangencias, quedando: $t\,T_t\,C$, $t\,T_c\,C$, $t\,T_t\,r$, $t\,T_t\,P$, $t\,C\,r$, $t\,C\,P$, $t\,r\,P$, $T_c\,C\,r$, $T_c C\,P$, $C\,r\,P$, $t\,t\,t$, $t\,t\,T_t$, $t\,t\,C$, $t\,t\,r$, $t\,t\,P$, $C\,C\,C$, $C\,C\,t$, $C\,C\,T_c$, $C\,C\,r$, $C\,C\,P$, $C\,T_c\,P$, $P\,P\,t$ y $P\,P\,C$.

Veamos a continuación la resolución de cada de uno de estos casos.

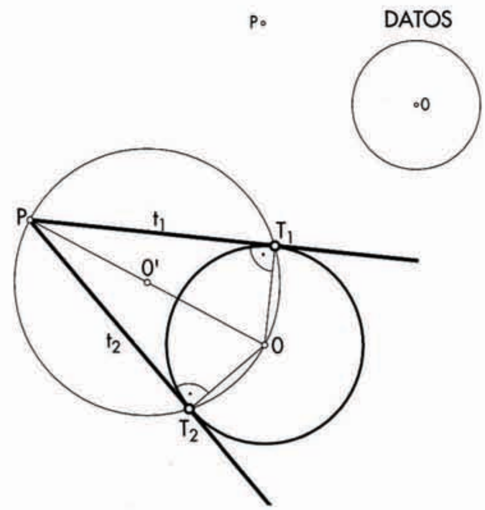


Fig. 2. Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto.

3 RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO: PC

Datos: *c. O* y punto *P*.

1. Se traza la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$, que corta a la circunferencia $c.O$ en los puntos de tangencia T_1 y T_2.

2. Se une P con T_1 y T_2, obteniendo así las rectas tangentes t_1 y t_2.

La construcción queda justificada, pues los triángulos PT_1O y PT_2O son rectángulos, por estar inscritos en una semicircunferencia; por lo tanto las rectas t_1 y t_2 son las tangentes buscadas por ser perpendiculares a los radios $\overline{OT_1}$ y $\overline{OT_2}$, verificando la propiedad vista en el apartado anterior.

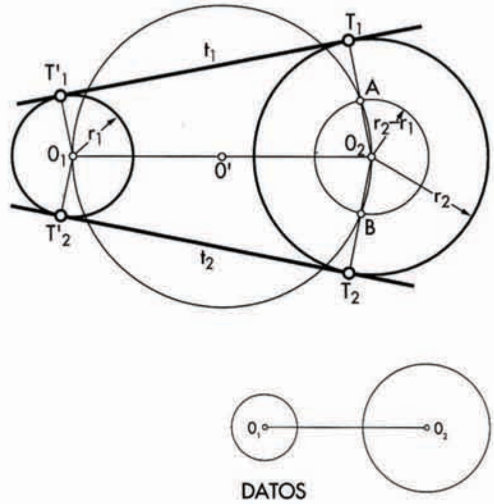


Fig. 3. Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias.

4 RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS: CC

Tangentes exteriores

Para resolver este caso aplicaremos el **procedimiento de dilataciones**, que consiste en transformar unos elementos geométricos en otros. Por ejemplo, reducir la circunferencia a su centro, trasladar una recta una determinada distancia, etc. De esta manera se consigue transformar un problema en otro ya conocido. Deshaciendo la dilatación se obtiene el resultado buscado.

Datos: *c.* O_1 y c. O_2

1. Se traza con centro en O_2 una circunferencia auxiliar de radio la diferencia de radios, $r_2 - r_1$, obteniendo la dilatación de la c. O_2. La c. O_1 se dilata transformandose en su centro O_1.

Hemos reducido este caso al apartado anterior.

2. Se traza la circunferencia *c. O'* de diámetro $\overline{O_1O_2}$, que corta a la circunferencia auxiliar en los puntos *A* y *B*.

3. Se une O_2 con *A* y *B* prolongando las líneas, hasta cortar a la $c.O_2$ en los puntos T_1 y T_2 de tangencia. En este tercer paso se ha deshecho la dilatación.

4. Por O_1 se trazan las rectas paralelas a los segmentos $\overline{O_2T_1}$ y $\overline{O_2T_2}$, que cortan a la *c.* O_1 en los puntos T_1' y T_2'. Uniendo T_1 con T_1' y T_2 con T_2', se obtienen las rectas tangentes t_1 y t_2.

Por simplificar la escritura, y mientras no haya posibilidad de confusión, cuando digamos circunferencia de centro O escribiremos c. O, es decir, nos referiremos a las circunferencias por sus centros.

CUESTIONES

1 ¿A qué tipos de movimientos corresponden estos dos casos de tangencias? Poner un ejemplo.

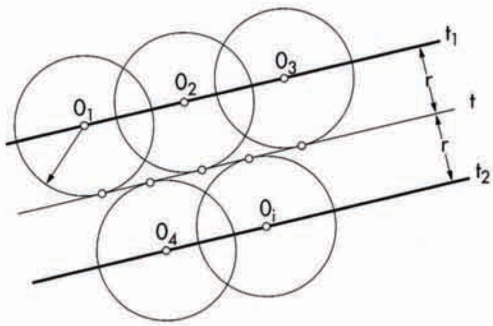


Fig. 5. L.G de los centros de la circunferencia de igual radio.

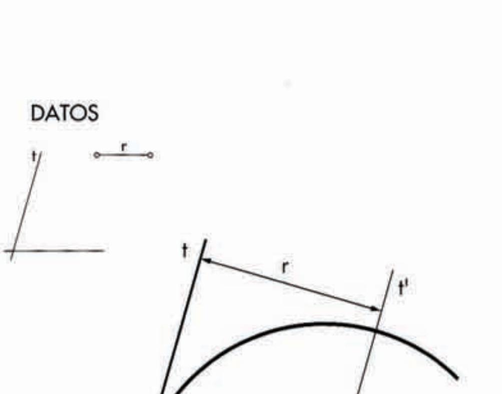


Fig. 6. Circunferencia tangente a dos rectas.

Tangentes interiores

Datos: *c.* O_1 y *c.* O_2.

Las tangentes interiores responden al esquema que se muestra en la figura 4. Los pasos a seguir son los mismos que en el caso anterior, con la diferencia de que la circunferencia auxiliar, tiene de radio la suma de los radios, es decir, $r_1 + r_2$.

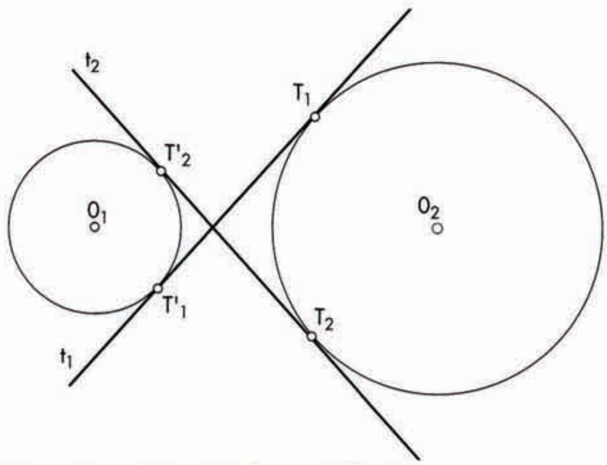


Fig. 4. Rectas tangentes interiores a dos circunferencias.

5 PRIMER LUGAR GEOMÉTRICO

Si varias circunferencias de igual radio *r*, son tangentes a una recta *t*, todos sus centros O_1, O_2, ..., O_i distan de la recta *t* la distancia del radio *r*, por tanto están sobre dos rectas t_1 y t_2 paralelas a la *t* a la distancia *r*. Esto nos permite enunciar:

El L.G. de todos los centros O_1, O_2, ..., O_i de las circunferencias de igual radio *r*, que son tangentes a una recta *t*, son otras dos rectas t_1 y t_2 paralelas a la recta *t*, a la distancia del radio *r*.

6 CIRCUNFERENCIA DE RADIO CONOCIDO, TANGENTE A DOS RECTAS: ttr

Datos: radio *r* y rectas *t* y *s*.

Si la circunferencia de radio *r* es tangente a la recta *t*, por lo visto en el apartado anterior, el centro de la circunferencia tiene que estar sobre una recta *t'* paralela a la recta *t* y a la distancia *r*. Por igual razón el centro, también, tiene que estar sobre una recta *s'* paralela a la *s* a la distancia *r*. Se deduce que el centro buscado se determina por intersección de las dos paralelas.

1. Se trazan las rectas *t'* y *s'* paralelas respectivamente a las rectas *t* y *s*, a la distancia *r*, cortandose en el centro *O* buscado.

2. Teniendo en cuenta, que la recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio, los puntos de tangencia T_1 y T_2, sobre las rectas *t* y *s*, se determinan trazando desde el centro *O*, líneas perpendiculares a las rectas *t* y *s*.

7 SEGUNDO LUGAR GEOMÉTRICO

Si varias circunferencias de centros O_1, O_2, ..., O_i son tangentes a una recta t en un punto T de ella, los segmentos $\overline{O_1T}$, $\overline{O_2T}$, ..., $\overline{O_iT}$ son perpendiculares a la recta t en el punto T y por lo tanto coinciden. Esto nos permite enunciar:

El L.G. de los centros O_1, O_2, ..., O_i de las circunferencias que son tangentes a una recta, *t*, en un punto, *T*, de ella, es una recta, *s*, perpendicular a la recta, *t*, por el punto de tangencia, *T*.

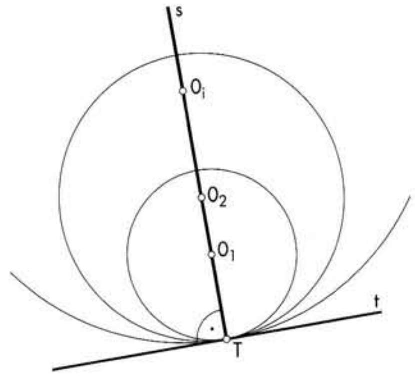


Fig. 7. L.G de los centros de las circunferencias tangentes a una recta en un punto.

8 TERCER LUGAR GEOMÉTRICO

Si varias circunferencias de centros O_1, O_2, ..., O_i contienen a dos puntos A y B, sus centros equidistan de ellos, por tanto pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Esto nos permite enunciar:

El L.G. de los centros O_1, O_2, ..., O_i de las circunferencias que pasan por dos puntos fijos *A* y *B*, es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

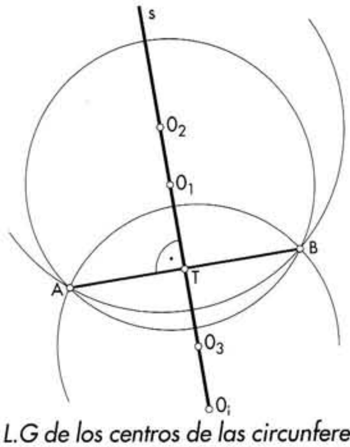


Fig. 8. L.G de los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos.

9 CIRCUNFERENCIA TANGENTE A UNA RECTA, EN UN PUNTO T DE ELLA Y QUE PASE POR OTRO P: $t\ T_t P$

Datos: recta *t*, punto de tangencia *T* y punto *P*.

Si la circunferencia es tangente a la recta *t* en el punto *T*, por el segundo L.G., tiene que estar en la perpendicular a la recta *t* por el punto *T*. Como además tiene que contener al punto *P*, su centro equidistará de los puntos *T* y *P* (tercer L.G.), por tanto el centro se determina por intersección de los dos L.G. Para ello:

1. Se traza por el punto *T* una recta *s* perpendicular a la recta *t*.

2. Se traza la mediatriz del segmento $\overline{TP}$, que corta a la perpendicular anterior en el centro *O* buscado.

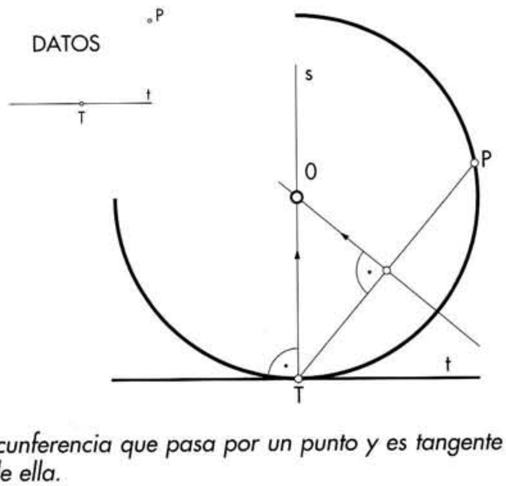


Fig. 9. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta en un punto de ella.

CUESTIONES

1 En el caso del apartado 6, ¿Hay más soluciones?

2 En el caso del apartado 9, ¿el punto *P* puede pertenecer a la recta *t*?

3 Trazar las circunferencias tangentes a dos rectas, conociendo el punto de tangencia de una de ellas: $t\ T_t$

Para su resolución y como sugerencia solo hay que recordar cómo se traza la bisectriz y el segundo L.G.

10 CUARTO LUGAR GEOMÉTRICO

Si se trazan circunferencias de radio *r*, que contengan a un punto *P*, todos los centros distan de *P* el radio *r*, es decir, están en una circunferencia de centro *P* y radio *r*. Esto nos permite enunciar:

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de igual radio, *r*, que contienen a un punto, *P*, es una circunferencia de igual radio, *r*, y de centro el punto *P*.

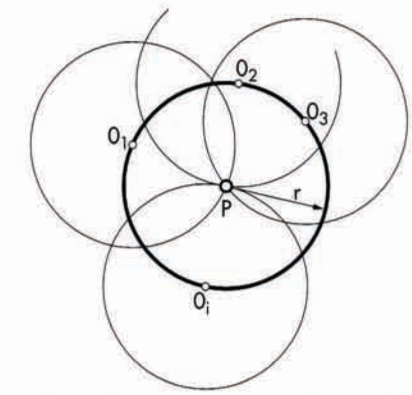


Fig. 10. L.G de los centros de las circunferencias que, pasando por un punto, tienen el mismo radio.

11 PROPIEDAD 2

El punto de tangencia *T*, de dos circunferencias tangentes, exteriores o interiores, y los centros de dichas circunferencias están alineados (sobre la misma recta).

Por ser la recta *t* tangente a la circunferencia *c.* O_1 en el punto *T*, es perpendicular al radio $\overline{O_1T}$ (por la propiedad 1). Por igual razón el radio $\overline{O_2T}$ es perpendicular a la recta *t;* por tanto, al ser los dos segmentos $\overline{O_1T}$ y $\overline{O_2T}$ perpendiculares a la recta *t* en el mismo punto *T*, tienen que estar sobre la misma recta.

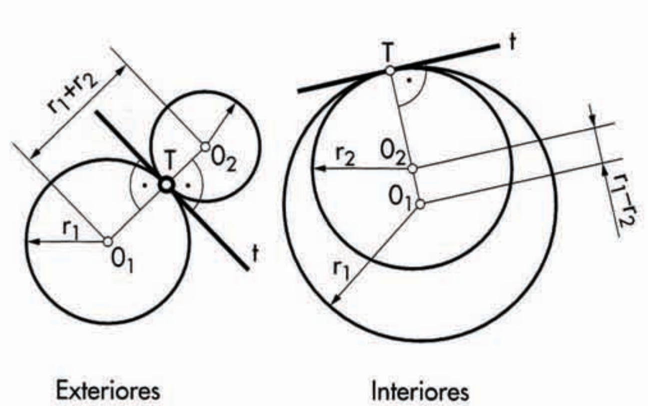


Fig. 11. El punto de tangencia y los centros de las circunferencias están sobre la misma recta.

En lo que sigue por simplificar, diremos "circunferencias interiores" ya se trate de circunferencias contenidas en otra o que contienen a otra.

Como consecuencia de esta propiedad, **la distancia entre los centros de dos circunferencias que son tangentes exteriores vale la suma de los radios, mientras que si las circunferencias son interiores, esta distancia será igual a la diferencia de sus radios.**

12 QUINTO LUGAR GEOMÉTRICO

Basándonos en el segundo L.G. y en la propiedad anterior, si varias circunferencias *c.* O_1, *c.* O_2, ..., *c.* O_i son tangentes a una circunferencia de centro *O* en un mismo punto *T*, sus centros están sobre la línea $\overline{OT}$. Esto nos permite enunciar:

El lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias *c.* O_1, *c.* O_2, ..., *c.* O_i que son tangentes a otra circunferencia de centro *O* en un mismo punto de tangencia, *T*, es la recta que une el centro *O*, con el punto de tangencia, *T*.

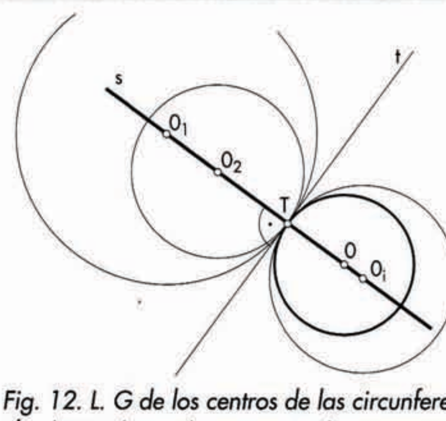


Fig. 12. L. G de los centros de las circunferencias tangentes a otra en un punto.

13 SEXTO LUGAR GEOMÉTRICO

Si a una circunferencia *c. O* de radio *r*, se le trazan circunferencias tangentes de igual radio *r'*, los centros O_1, O_2, ..., O_i están sobre una circunferencia con centro en *O*, y de radio la suma de los radios $r + r'$. De esto podemos enunciar:

El L.G. de los centros de las circunferencias de igual radio *r'*, que son tangentes exteriores a otra circunferencia *c. O*, es una circunferencia concéntrica de radio la suma de radios, $r + r'$.

Si las circunferencias *c.* O_1, *c.* O_2, ..., *c.* O_i, contienen a la circunferencia *c. O* o viceversa, la circunferencia que contiene a los centros tiene por radio la diferencia $r' - r$, teniendo en este caso:

El L.G. de todos los centros de las circunferencias de igual radio *r'*, que son tangentes interiores a otra circunferencia *O*, es una circunferencia concéntrica de radio la diferencia de radios, $r' - r$.

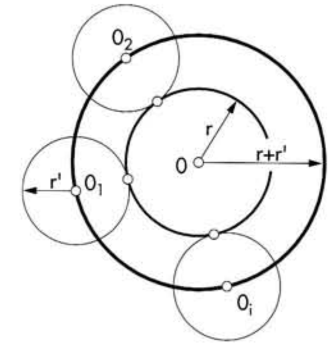


Fig. 13. L. G de los centros de las circunferencias, que teniendo el mismo radio, son tangentes exteriores a otra circunferencia.

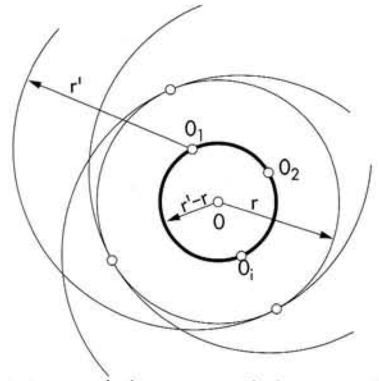


Fig. 14. L. G de los centros de las circunferencias, que teniendo el mismo radio, son tangentes interiores a otra circunferencia.

14 CIRCUNFERENCIAS DE RADIO CONOCIDO, TANGENTES A OTRA Y QUE PASEN POR UN PUNTO: CrP

En los casos de tangencias entre circunferencias en que se conoce el radio de las soluciones, hay que plantearse la siguiente pregunta, basada en el sexto L.G.: ¿ las posibles soluciones son exteriores a la circunferencia dada? Si la respuesta es **sí**, se suman los radios; por el contrario si la respuesta es **no**, se restan los radios (en valor absoluto).

A continuación vamos a determinar las soluciones exteriores. El problema se resuelve aplicando los lugares geométricos cuarto y sexto.

Datos: radio *r'*, circunferencia *c. O* y punto *P*.

1. Se traza con centro en *O* la circunferencia auxiliar de radio $r + r'$.
2. Se traza con centro en *P* la circunferencia de radio *r'*, que corta a la anterior en los centros O_1 y O_2 buscados.
3. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se determinan aplicando la propiedad expuesta en el apartado 11, uniendo *O* con O_1 y O_2.

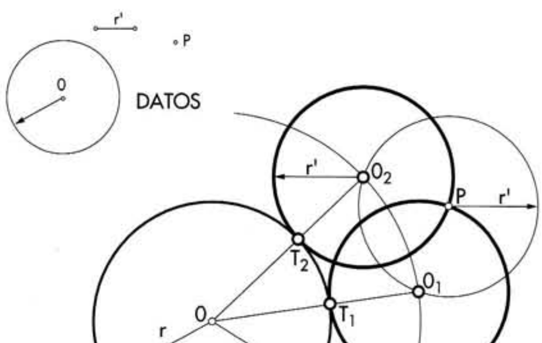
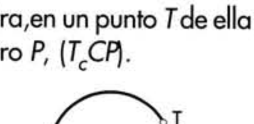


Fig. 15. Circunferencias de radio conocido, tangentes a otra y que pasen por un punto.

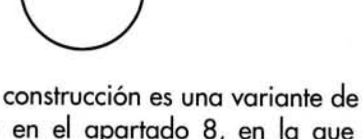
CUESTIONES

1 Trazar la circunferencia de radio conocido tangente a una recta y que pase por un punto *P*, (*trP*).



Para su construcción y como sugerencia apoyarse en el primer y cuarto L.G.

2 Trazar la circunferencia tangente a otra,en un punto *T* de ella y que pase por otro *P*, (T_cCP).



Esta construcción es una variante de la vista en el apartado 8, en la que la recta t se ha sustituido por una circunferencia *c. O*. Como sugerencia fijarse en el quinto L.G.

3 En el caso *CrP*, ¿cuándo habrá una solución? ¿Cuándo habrá 4? ¿El punto *P* puede ser interior a la circunferencia dada?

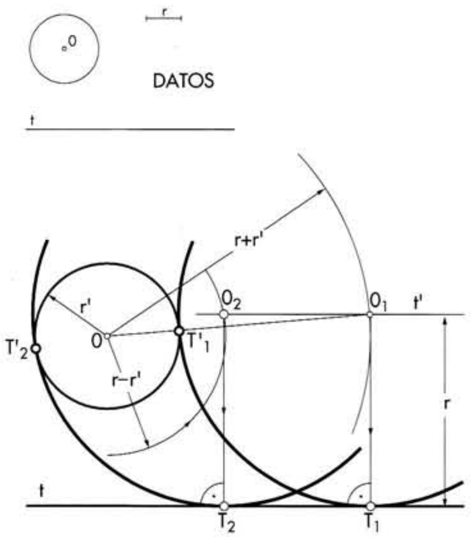


Fig. 16. Circunferencias de radio conocido tangentes a otra circunferencia y a una recta.

15 CIRCUNFERENCIAS, DE RADIO CONOCIDO, TANGENTES A OTRA Y A UNA RECTA: tCr

Este caso puede tener varias soluciones, hasta un máximo de ocho, según sean los datos. Pero independientemente de esto, el proceso a seguir es parecido, aplicando los L.G. primero y sexto.

En el presente caso vamos a determinar una solución externa y otra que contenga a la circunferencia dada.

Datos: radio *r*, circunferencia *c. O* y recta *t*.

1. Se traza la recta *t'* paralela a la *t* a la distancia *r*.
2. Se traza con centro *O* y radio $r + r'$, un arco que corta a la recta *t'* en el centro O_1, solución exterior. Los puntos de tangencia T_1 y T'_1, se determinan aplicando las propiedades primera y segunda.
3. La solución que contiene a la circunferencia *c.O*, se realiza de igual manera, pero empleando el arco de radio $r - r'$, que corta en O_2, siendo los puntos de tangencia T_2 y T'_2.

16 CIRCUNFERENCIAS DE RADIO CONOCIDO TANGENTES A OTRAS DOS: CCr

Esta construcción puede presentar como máximo 8 soluciones, pero el proceso a seguir es el mismo. En este caso vamos a determinar una solución exterior e interior a las circunferencias dadas y otra que las contiene.

Datos: radio *r*, circunferencias *c. O* y *c. O'*.

1. Se trazan con centro en *O* y *O'* y radios $r - r_1$ y $r - r_2$ respectivamente, dos arcos que se cortan en el centro O_1, de la circunferencia solución que contiene a las dos dadas.
2. Se traza con centro en *O'* un arco de radio $r + r_2$ que corta en O_2, al arco de centro *O* trazando anteriormente. Este es el centro de la circunferencia solución, que es exterior a la circunferencia *c. O'* y contiene a la circunferencia *c. O*.
3. Los puntos de tangencia T_1, T'_1, T_2 y T'_2 se determinan, uniendo *O* y *O'* con O_1 y O_2, hasta cortar a las circunferencias *c. O* y *c. O'*.

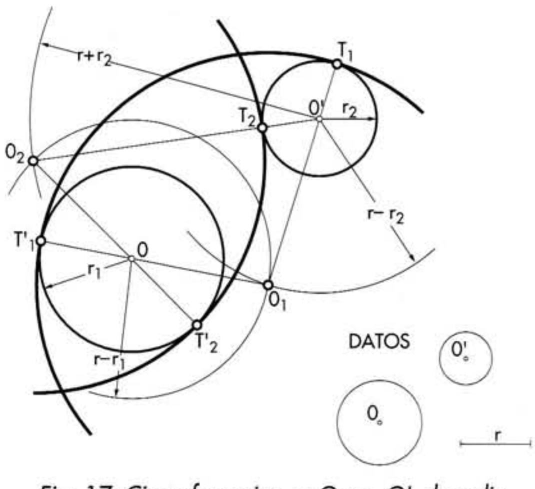


Fig. 17. Circunferencias, c. O y c. O', de radio conocido tangentes a otras dos.

CUESTIONES

1 En el caso *tCr* (apartado 15), ¿cómo tienen que ser los datos para que solo haya una solución? ¿Y para que las soluciones sean ocho?

17 POTENCIA DE UN PUNTO P CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA c. O

Si desde un punto *P* se trazan dos secantes a una circunferencia *c. O*, cortándola en los puntos *A,B, C* y *D* (fig 18) se verifica que:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD} = K$$

Donde el valor *K* se denomina **potencia del punto *P* respecto de la circunferencia *c. O***, siendo constante para cualquier secante o tangente que pase por el punto *P*.